

2023 年普通高等学校招生全国统一考试
高三第一次联合诊断检测 数学

数学测试卷共 4 页，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$

2. $\cos 198^\circ \cos 132^\circ + \cos 42^\circ \sin 18^\circ =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

3. 设复数 z 满足 $\frac{z}{i} + \bar{z} \cdot i = 1$, 则 z 的虚部为

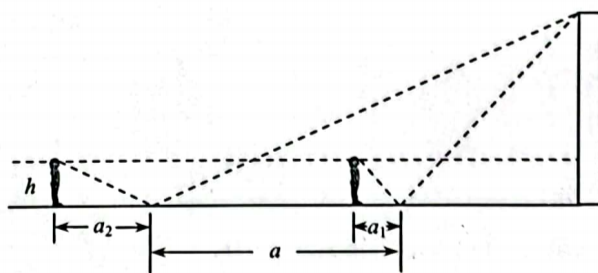
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

4. 某人有 1990 年北京亚运会吉祥物“盼盼”，2008 年北京奥运会吉祥物“贝贝”“晶晶”“欢欢”“迎迎”“妮妮”，2010 年广州亚运会吉祥物“阿祥”“阿和”“阿如”“阿意”“乐羊羊”，2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”，2022 年杭州亚运会吉祥物“琮琤”“莲莲”“宸宸”，若他从这 15 个吉祥物中随机取出两个，这两个吉祥物都是来自在北京举办的运动会的概率是

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

5. 某班课外学习小组利用“镜面反射法”来测量学校内建筑物的高度。步骤如下：①将镜子（平面镜）置于平地上，人后退至从镜中能看到房顶的位置，测量出人与镜子的距离；②将镜子后移，重复①中的操作；③求建筑物高度。如图所示，前后两次人与镜子的距离分别 $a_1 \text{ m}$, $a_2 \text{ m}$ ($a_2 > a_1$)，两次观测时镜子间的距离为 $a \text{ m}$ ，人的“眼高”为 $h \text{ m}$ ，则建筑物的高度为

- A. $\frac{ah}{a_2 - a_1} \text{ m}$
B. $\frac{(a_2 - a_1)h}{a} \text{ m}$
C. $\frac{a(a_2 - a_1)}{h} \text{ m}$
D. $\frac{ah^2}{a_2 - a_1} \text{ m}$



6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $5S_9 = 9a_9 - 36$, 则 $a_4 =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2



7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过 F 且与 l_1 平行的直线与双曲线 C 及直线 l_2 依次交于点 B, D , 点 B 恰好平分线段 FD , 则双曲线 C 的离心率为
- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

8. 已知 $a = \frac{2}{5}$, $b = e^{-\frac{3}{5}}$, $c = \ln 5 - \ln 4$, 则

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知两组样本数据 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 和 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 的均值和方差分别为 \bar{x}, \bar{y} 和 s_1^2, s_2^2 , 若 $x_i + y_i = 100$ 且 $x_i > y_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 则

- A. $\bar{x} > \bar{y}$ B. $\bar{x} + \bar{y} = 100$ C. $s_1^2 > s_2^2$ D. $s_1^2 = s_2^2$

10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F, G 分别是棱 AB, AD, AA_1 上的点, 则一定成立的是

A. $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{AF}|^2 + |\overrightarrow{AG}|^2$

B. $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AG}|$

C. $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

D. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$, 则使得“ $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 中心对称”成立的一个充分不必要条件是

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{3\pi}{4}$

B. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后关于原点对称

C. $f(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{16}$ 对称

12. 已知函数 $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, 则

A. $f(x)$ 有两个零点

B. 过坐标原点可作曲线 $f(x)$ 的切线

C. $f(x)$ 有唯一极值点

D. 曲线 $f(x)$ 上存在三条互相平行的切线

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{x})^9$ 的展开式中常数项为_____.

14. 已知 $a > 0, b > 0, 2a + b = 2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值是_____.



15. 已知定义域为 $(0, +\infty)$ 的减函数 $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 且 $f(2) = -1$, 则不等式 $f(x+2) + f(x+4) > -3$ 的解集为_____.

16. 在 $\triangle PAB$ 中, $AB = 4$, $\angle APB = \frac{\pi}{3}$, 点 Q 满足 $\overrightarrow{QP} = 2(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ})$, 则 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b = c(\cos A + \sin A)$.

(1) 求角 C ;

(2) 求 $\frac{a + \sqrt{2}b}{c}$ 的最大值.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设 $b_n = \lg^2 a_{n+1} - \lg^2 a_n$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项和为 35, $b_4 = 9$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

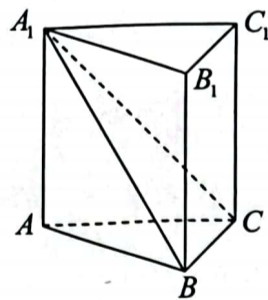
19. (12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ABB_1A_1 是正方形, 且平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 若直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, E 为线段 A_1C 的中点,

求平面 ABE 与平面 BCE 所成锐二面角的大小.



20. (12 分)

驾照考试新规定自 2022 年 8 月 1 日开始实施, 其中科目一的考试通过率低成为热点话题, 某驾校需对其教学内容和教学方式适当调整以帮助学员适应新规定下的考试, 为此驾校工作人员欲从该驾校的学员中收集相关数据进行分析和统计. 该驾校工作人员从 2022 年 7 月份该校首次参加科目一考试的新学员和 8 月份该校首次参加科目一考试的新学员中分别随机抽取了 25 人, 对他们首次参加科目一考试的成绩进行统计, 按成绩“合格”和“不合格”绘制成 2×2 列联表如下:



	合格	不合格	合计
2022 年 7 月	20		
2022 年 8 月		15	
合计			

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.05	0.01	0.005
k	2.706	3.841	6.635	7.789

- (1) 完成题中的 2×2 列联表, 并判断能否在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为“驾考新规的实施”对该驾校学员首次参加科目一考试的合格率有影响?
- (2) 若用样本中各月科目一考试的合格率作为该地区当月科目一考试通过的概率, 已知该地区在 2022 年 7 月和 8 月首次参加科目一考试的学员人数之比为 2:1, 现从该地区在 2022 年 7 月和 8 月首次参加科目一考试的学员中随机抽取两名学员进行学情调查, 设抽到的两名学员中有 X 人首次参加科目一考试不合格, 求 X 的分布列与数学期望.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(2, \sqrt{2})$, 点 O 为坐标原点.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 椭圆 C 上的动点 M, P, Q 满足直线 MP, MQ 的斜率互为相反数, 且点 M 不在坐标轴上, 设直线 PQ, OM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, $a > 0$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的零点个数;
- (2) 若对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 不等式 $e^{ax} \geq ax \cdot f(x)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.



2023 年普通高等学校招生全国统一考试
高三第一次联合诊断检测 数学参考答案

一、单选题

1~8 DCBBABBC

第 8 题提示: 由 $e^x \geq 1+x$, $\therefore e^{-\frac{3}{5}} > \frac{2}{5}$, 又 $\ln(1+x) \leq x$, $\therefore \ln 5 - \ln 4 = \ln(1+\frac{1}{4}) < \frac{1}{4}$

二、多选题

9. ABD 10. ABD 11. ABD 12. ACD

第 11 题提示: $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 中心对称, 则 $\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$,

$$\omega = \frac{12k-4}{3}, \text{ 所以充要条件是 } \omega \in \mathbf{S} = \{\omega \mid \omega = \frac{12k-4}{3}, k \in \mathbf{Z}, \omega > 0\}.$$

对于 A, $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{8}{3} = \frac{12 \cdot 1 - 4}{3}$, 故 A 正确; 对于 B, 可知 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 是原函数的对称点,

$$-\frac{\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{-24k+8}{3} = \frac{12(-2k+1)-4}{3} \in \mathbf{S}, \text{ 故 B 正确; 对于 C, } \sin(-\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ 或 } 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \omega = -8k \text{ 或 } -\frac{24k+4}{3}, \omega \text{ 不一定在 } \mathbf{S} \text{ 中, C 错误; 对于 D,}$$

$$\frac{\pi}{16}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 16k + \frac{8}{3} = \frac{12(4k+1)-4}{3} \in \mathbf{S}, \text{ 故 D 正确.}$$

第 12 题提示: $f(x) = (x-1)(x^3+x^2+1)$, 对于函数 $g(x) = x^3+x^2+1$, $g'(x) = 3x^2+2x$, 可得 $g(x)$ 在 $x = -\frac{2}{3}$,

$x=0$ 处分别取极大值和极小值, 由 $g(0) > 0$, 知 $g(x)$ 只有一个零点, $f(x)$ 有两个零点, A 正

确; 假设 B 成立, 设切点坐标为 $(x_0, f(x_0))$, 切线方程

$$y = (4x_0^3 - 2x_0 + 1)(x - x_0) + x_0^4 - x_0^2 + x_0 - 1 \text{ 即 } y = (4x_0^3 - 2x_0 + 1)x - 3x_0^4 + x_0^2 - 1,$$

$$\therefore -3x_0^4 + x_0^2 - 1 = 0, \text{ 但显然 } -3x_0^4 + x_0^2 - 1 < 0, \text{ B 错误; } f'(x) = 4x^3 - 2x + 1, f''(x) = 12x^2 - 2,$$

$$\therefore f'(x) \text{ 在 } x = -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ 分别取到极大值和极小值, 由 } f'(\frac{\sqrt{6}}{6}) > 0 \text{ 知 } f'(x) \text{ 只有一个零点,}$$

$f(x)$ 有一个极值点; 若 D 正确, 则存在实数 m 使得 $f'(x) = 4x^3 - 2x + 1 = m$ 有三个不同的根,

此时只需 $m \in (f'(\frac{\sqrt{6}}{6}), f'(-\frac{\sqrt{6}}{6}))$ 即可成立, 故 D 正确.

三、填空题

13. -5376 14. 4 15. $(-2, 0)$ 16. $-\frac{88}{25}$

第 15 题提示: $\because -3 = 3f(2) = f(8), f(x+2) + f(x+4) > -3 \Rightarrow \begin{cases} f(x^2 + 6x + 8) > f(8) \\ x+2 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 8 < 8 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 0$$

第 16 题提示: 设 AB 中点为 M , $\overrightarrow{QP} = 2(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ}) \Rightarrow \overrightarrow{QP} = 4\overrightarrow{MQ}$,

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{MA}) = |\overrightarrow{QM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2$$

由 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$, 知 P 点轨迹是以 AB 为弦, 圆周角为 $\frac{\pi}{3}$ 的优弧, \therefore 当 $PM \perp AB$ 时, $|QM|$ 最大,

$$\text{此时 } \triangle PAB \text{ 是等边三角形, } |QM| = \frac{2\sqrt{3}}{5}, |\overrightarrow{QM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = \frac{12}{25} - 4 = -\frac{88}{25}.$$

四、解答题

17. (10 分)

解: (1) 由正弦定理 $\sin B = \sin C(\cos A + \sin A)$, $\sin(A+C) = \sin C \cos A + \sin C \sin A$

$$\Rightarrow \sin A \cos C = \sin C \sin A, \tan C = 1, C = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由正弦定理得:

$$\frac{a + \sqrt{2}b}{c} = \frac{\sin A + \sqrt{2} \sin B}{\sin C} = \sqrt{2}(\sin A + \sqrt{2} \sin(A + \frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(2 \sin A + \cos A) = \sqrt{10} \sin(A + \varphi),$$

$$\text{其中 } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ 又 } A \in (0, \frac{3\pi}{4}), \text{ 故 } A + \varphi \in (\varphi, \frac{3\pi}{4} + \varphi), \therefore \sin(A + \varphi)_{\max} = 1,$$

$$\therefore \sqrt{10} \sin(A + \varphi)_{\max} = \sqrt{10}, \text{ 故 } \frac{a + \sqrt{2}b}{c} \text{ 的最大值为 } \sqrt{10}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (12 分)

解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$),

$$\therefore b_n = (\lg a_{n+1} + \lg a_n)(\lg a_{n+1} - \lg a_n) = \lg a_1^2 q^{2n-1} \cdot \lg q = (2 \lg a_1 + (2n-1) \lg q) \cdot \lg q$$

$$\text{故 } b_{n+1} = (2 \lg a_1 + (2n+1) \lg q) \cdot \lg q, \text{ 所以 } b_{n+1} - b_n = 2 \lg^2 q,$$

故 $\{b_n\}$ 是以 $2 \lg^2 q$ 为公差的等差数列; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) \because 数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项和为 35, $\therefore 5b_3 = 35, b_3 = 7$, 又 $b_4 = 9$, 故 $\{b_n\}$ 的公差 2,

$$\text{故 } b_n = 2n + 1, \text{ 即 } (2 \lg a_1 + (2n-1) \lg q) \cdot \lg q = 2n + 1,$$

$$\text{故 } \lg^2 q = 1 \text{ 且 } (2 \lg a_1 - \lg q) \lg q = 1, \text{ 从而 } q = 10,$$

$$a_1 = 10 \text{ 或 } q = \frac{1}{10}, a_1 = \frac{1}{10}, \text{ 所以 } a_n = 10^n \text{ 或 } \frac{1}{10^n}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

解: (1) 设 A_1B 中点为 M , 则 $AM \perp A_1B$

\because 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $\therefore AM \perp$ 平面 A_1BC , $\therefore AM \perp BC$

又直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, $\therefore BB_1 \perp BC$

$\therefore BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $\therefore AB \perp BC \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\angle ACM = \frac{\pi}{6}$,

不妨设 $AB = 2$, $AM = \sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2$

以 B 为原点, \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} , $\overrightarrow{BB_1}$ 分别为 x , y , z 轴正向建立坐标系

$A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $E(1, 1, 1)$

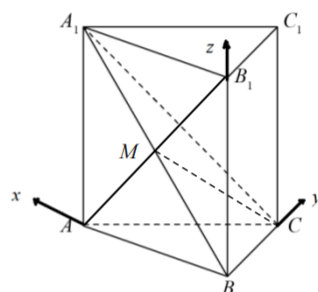
设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = 1, \vec{n} = (0, 1, -1)$$

同理可得平面 CBE 的法向量为 $\vec{m} = (1, 0, -1)$

设平面 ABE 与平面 BCE 所成锐二面角的大小为 θ

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



20. (12 分)

解: (1) 由题得

	合格	不合格	合计
2022 年 7 月	20	5	25
2022 年 8 月	10	15	25
合计	30	20	50

$$K^2 = \frac{50(20 \cdot 15 - 5 \cdot 10)^2}{25 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 20} = 8 \frac{1}{3} > 3.841$$

\therefore 可以在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为“驾考新规的实施”对该驾校学员首次参加科目一考试的合格率有影响 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由题该地 7 月份不合格率为 $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, 8 月份不合格率为 $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$, 抽取 7 月份首次参加考试的学员概率

为 $\frac{2}{3}$ ，抽取 8 月份首次参加考试的学员概率为 $\frac{1}{3}$

X 可能的取值为 0, 1, 2

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 + C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$P(X=1) = 1 - P(X=2) - P(X=0) = \frac{4}{9}$$

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$EX = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (12 分)

解：(1) 由题 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ ， $a^2 = b^2 + c^2$ ，联立解得 $a^2 = 8$ ， $b^2 = 4$

椭圆方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 设 $N(x_0, y_0)$ ， $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，直线 $l_{NP} : y = k(x - x_0) + y_0$

联立椭圆方程得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4(y_0 - kx_0)kx + 2(y_0 - kx_0)^2 - 8 = 0$

$$x_1 + x_0 = \frac{4(kx_0 - y_0)k}{2k^2 + 1}, \quad \therefore x_1 = \frac{2k^2 x_0 - 4ky_0 - x_0}{2k^2 + 1}$$

$$y_1 = k(x_1 - x_0) + y_0 = \frac{y_0 - 2kx_0 - 2k^2 y_0}{2k^2 + 1}$$

$$\text{同理可得 } x_2 = \frac{2k^2 x_0 + 4ky_0 - x_0}{2k^2 + 1}, \quad y_2 = \frac{y_0 + 2kx_0 - 2k^2 y_0}{2k^2 + 1}$$

$$\therefore k_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4kx_0}{8ky_0} = \frac{x_0}{2y_0}, \quad k_2 = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\therefore k_1 k_2 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (12 分)

解：(1) $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增

$$f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$$

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$, $f(x)$ 的零点个数为 0; 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的零点个数为 1;

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的零点个数为 2 5 分

(2) 由题 $\frac{e^{ax}}{ax} \geq ax - \ln x = \ln \frac{e^{ax}}{ax} + \ln a$

$$\text{令 } t = \frac{e^{ax}}{ax}, \text{ 对于 } g(x) = \frac{e^x}{x}, \quad g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \quad \therefore g(x) \geq g(1) = e, \quad t \geq e$$

$\therefore t \geq \ln t + \ln a$ 对 $t \geq e$ 恒成立

对于 $h(t) = t - \ln t$, $h'(t) = \frac{t-1}{t}$, $\therefore h(t)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递增

$$\therefore h(t) \geq h(e) = e - 1$$

$$\therefore \ln a \leq e - 1, \quad 0 < a \leq e^{e-1} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$